Rudolf Wille

Musiktheorie und Mathematik

Daß es die große und schwere Aufgabe unserer Tage ist, die Theorie auf die Höhe des Verständnisses der Kunst der letzten beiden Jahrhunderte zu führen, sei hier besonders hervorgehoben. Die strenge musikalische Logik, die völlige Durchdringung des Aufbaues riesengroß angelegter Sätze mit einer zwingenden Gesetzmäßigkeit und Folgerichtigkeit hat in Sebastian Bachs Kunst einen Höhepunkt erreicht, den selbst ein Beethoven nicht zu überbieten vermochte. Gelingt es der Theorie, Bachs Faktur völlig zu enträtseln, Formeln für die Gesetze zu finden, welche dieser Riesengeist in seinem Schaffen unbewußt – oder gar bewußt? – befolgte, so hat sie für unsere Zeit ihre Schuldigkeit getan. Daß diese Aufgabe heute noch nicht gelöst ist, steht für mich fest; doch wollen wir nicht die Hoffnung aufgeben, daß sie gelöst werden kann![1]

Mit diesem Zitat aus Hugo Riemanns *„Geschichte der Musiktheorie"* begann Wolfgang Graeser auf der Beethoven-Zentenarfeier (Wien 1927) seinen Vortrag *„Neue Bahnen in der Musikforschung"*, in dem er seinen Weg zur Lösung der Riemannschen Aufgabenstellung skizzierte. Schon als Siebzehnjähriger hatte Wolfgang Graeser mit seiner groß angelegten Neuordnung von Bachs *„Kunst der Fuge"* Aufsehen erregt. Diese Neuordnung, beschrieben in einem hundertseitigen Aufsatz im Bach-Jahrbuch 1924, gründete sich auf mathematischen Überlegungen zur Musiktheorie, die als eine erste Zusammenschau von Musiktheorie und moderner Mathematik angesehen werden können. Den Anlaß, in der Mathematik Ausdrucksmittel für musikalische Zusammenhänge zu suchen, beschreibt Wolfgang Graeser am Anfang des Abschnittes über die Prinzipien des Kontrapunkts: *Es ist ein beinahe aussichtsloses oder zum mindestens vermessenes Unterfangen, mit den Mitteln unserer heutigen Musikwissenschaft an ein so enorm schwieriges Werk, wie die Kunst der Fuge, von der formalen Seite heranzutreten. Wir sind genötigt, statt mit einer wohldurchdachten und eindeutigen wissenschaftlichen Sprache und Terminologie, mit hinkenden Vergleichen, technischen Bezeichnungen aus anderen Gebieten und trügerischen Analogien zu arbeiten*[2].

Wolfgang Graeser fand die Ansätze seiner musiktheoretischen Grundlegung in neuen Entwicklungen der Mathematik, die bis heute

Abb. 1. Zur kontrapunktischen Form schreibt Wolfgang Graeser: *Bauen wir einmal ein kontrapunktisches Werk auf. Da haben wir zunächst ein Thema. Dies ist eine Zusammenfassung gewisser Töne, also eine Menge, deren Elemente Töne sind. Aus diesem Thema bilden wir eine Durchführung in irgendeiner Form. Immer wird die Durchführung die Zusammenfassung gewisser Themaeinsätze zu einem Ganzen sein, also eine Menge, deren Elemente Themen sind. Da die Themen selber Mengen von Tönen sind, so ist die Durchführung eine Menge von Mengen. Und eine kontrapunktische Form, ein kontrapunktisches Musikstück ist die Zusammenfassung gewisser Durchführungen zu einem Ganzen, also eine Menge, deren Elemente Mengen von Mengen sind, wir können also sagen: eine Menge von Mengen von Mengen* ([13], Seite 17). Zur Veranschaulichung der Graeserschen Begriffsbestimmung ist die erste Notenseite des Contrapunctus I aus Bachs „Kunst der Fuge“ als Mengendiagramm dargestellt.

ihre Aktualität nicht eingebüßt haben. Aus Cantors Mengenlehre erwuchs so die folgende Formulierung: *Bezeichnen wir die Zusammenfassung irgendwelcher Dinge zu einem Ganzen eine Menge dieser Dinge und die Dinge selber als die Elemente der Menge, so bekommen wir etwa das folgende Bild einer kontrapunktischen Form: eine kontrapunktische Form ist eine Menge von Mengen von Mengen*[3] (Abb. 1). Wie er selbst erkannte, klingt das etwas abstrus, doch führte er das derart umrissene Formverständnis weiter aus, wozu ihm hauptsächlich die auf dem Symmetriebegriff basierende Geometrie Pate stand. Seine programmatischen Ausführungen über Symmetrien in der Musik wiesen weit voraus und fanden erst in jüngster Zeit wenigstens teilweise ihre Erfüllung, am weitestgehenden in den Untersuchungen des Schweizers Guerino Mazzola.

Seine Forschungen über Bachs Kunst der Fuge hatte Wolfgang Graeser noch vor seinem Abitur beendigt, das er auf besondere Genehmigung des Preußischen Kultusministers als Siebzehnjähriger ablegte. Darauffolgende Studien in Mathematik, Physik und Philosophie legten die Grundlage für den Ausbau seiner musiktheoretischen Gedanken. Die metaphysischen und psychologischen Unterbauten seiner Untersuchungen entfaltete er in dem Oswald Spengler gewidmeten Buch *„Körpersinn"* (1927). In seinem Wiener Vortrag stellte er dann den Plan einer neuen Musiktheorie vor, die in einer weit ausgreifenden Abhandlung mit dem Titel *„Hörsinn"* erscheinen sollte. *Der Hörsinn, welchem alle musikalischen Wahrnehmungen angehören,* fällt unter die Vorstellungen vom Sinnesraum und Sinneswelt, die *im Sinne der von Hermann Minkowski in die Relativitätstheorie eingeführten Begriffsbildung von der raum-zeitlichen Struktur und Weltgeometrie zu verstehen*[4] sind. Der Weltgeometrie der Hörwelt liegt der Hörraum zugrunde, und zwar als *abzählbar unendlichdimensionaler Funktionenraum, dessen Punkte fastperiodische Funktionen im Sinne von Harald Bohr sind*[5]. Ausdrücklich weist Wolfgang Graeser darauf hin, daß eine mathematische Behandlung der Musiktheorie allein nicht befriedigen wird: *Alle rationalen Theorien sind Gerüste und deshalb unzureichend. Zur wesensmäßigen Erfassung wird eine Logosphilosophie und Metaphysik herangezogen*[6].

Wolfgang Graeser hat seinen großen Entwurf nicht mehr ausgeführt. Nach zwei schweren Nervenzusammenbrüchen in den Jahren 1927 und 1928 schied der Einundzwanzigjährige freiwillig aus dem Leben; eine geniale Frühbegabung war an einem übermäßigen Erkenntnisstreben, das den ganzen Kosmos ausschöpfen wollte, zerbrochen. Anzeichen der Katastrophe gab es schon nach dem ersten Zusammenbruch: *Der*

„Seelenrekonvaleszent“ schrieb befremdlich von seinen „Hirngespinsten“, im Stile Zarathustras, von seiner „Einsamkeit auf eisigen, sturmdurchtobten Höhen und Bergen, auf denen andere Menschen nicht mehr atmen können“[7]. Seinen Wiener Vortrag beendete er mit der Feststellung, daß das *antikisch statische Theoriegerüst der Musik durch eine faustisch-dynamische Konstruktion ersetzt werden mußte*[8]. Faustisch hat sich Wolfgang Graeser wohl auch selbst verstanden, ganz im Sinne des ihm befreundeten Oswald Spengler, für den faustisch *die kennzeichnende Eigenschaft des abendländischen Menschen mit seinem nie befriedigten Drang nach Erkenntnis der Wahrheit, des absolut Gültigen, der letzten Dinge* war – *im Gegensatz zum appolinischen Menschen der griechischen Antike*[9].

Was machte denn zu Beginn unseres Jahrhunderts die Spannweite zwischen Musik und Mathematik aus, daß ihre Bewältigung die Lebenskraft eines Menschen überstieg? Hat man sich nicht seit alters darum bemüht, Musik und Mathematik miteinander zu verbinden? In der Tat, die Geschichte der wechselseitigen Beziehungen zwischen Musik und Mathematik ist von großer Vielfalt; sie kann hier jedoch nur angedeutet werden.

Für die Pythagoräer war die irdische Musik eine Nachbildung der himmlischen Musik, deren Harmonie auf Zahlen beruhte. So wird die *Tetraktys,* die den griechischen Tonsystemen zugrundeliegt und die als *Quelle und Wurzel ewiger Natur*[10] angesehen wird, durch die Zahlen 6, 8, 9 und 12 wiedergegeben. Am Monochord (Abb. 2), einem Instrument mit einer Saite, wurden diese Zahlen zum Erklingen gebracht, indem die Saite in zwölf gleichlange Abschnitte eingeteilt und Saitenlängen jeweils bestehend aus 6, 8, 9 und 12 dieser Abschnitte abgegriffen wurden. Ist die Saite auf E gestimmt, so ergeben sich dabei die Töne e, H, A und E. Den Intervallen Oktave, Quinte und Quarte wurden deshalb die Zahlenverhältnisse 2:1, 3:2 und 4:3 zugeordnet. Die Oktavaufteilung der Tetraktys war Ausdruck der Lehre vom arithmetischen und harmonischen Mittel[11]: *Die Zahl 9 ist das „arithmetische Mittel“ zwischen 12 und 6, d. h. die Differenzen 12−9 und 9−6 sind gleich. Die Zahl 8 ist das „harmonische Mittel“ zwischen 12 und 6, d. h. die Differenzen 12−8 und*

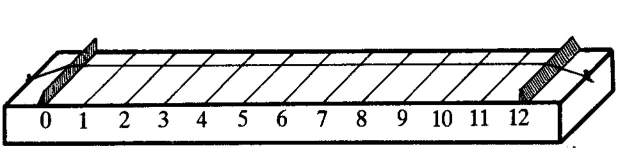


Abb. 2. Um die Entsprechung von Ton und Zahl zu demonstrieren, benutzt man seit der Antike das Monochord, einen Resonanzkasten mit darübergespannter Saite.

8–6 verhalten sich wie 12 zu 6[12]. Alle vier Zahlen bilden die Proportion 12:9 = 8:6, die in ihrer Verbindung von arithmetischem und harmonischem Mittel die *„vollkommenste Proportion“* genannt wurde.

Das innige Zusammenwirken von Musik und Mathematik, wie es für die Tetraktys aufgezeigt wurde, bestimmte weitgehend die platonisch-pythagoreische Tonordnung. So gründet sich das bis heute gültige Muster der siebenstufigen Tonleiter auf eine weitere Aufteilung der Tetraktysintervalle. Das Antik-Dorische erhielt man, indem man von den beiden Quarten jeweils von oben her zweimal die große Sekunde 9:8 abgriff, was in den uns geläufigen Tonnamen durch folgende Leiter wiedergegeben werden kann:

4:3 9:8 4:3

E F G A H c d e

256:243 9:8 9:8 256:243 9:8 9:8

Neben der Quartenteilung (9:8)·(9:8)·(256:243) = 4:3, die dem Pythagoras selbst zugeschrieben wird, berichtet Ptolemaios in seiner zusammenfassenden *„Harmonielehre“*[13] von einer großen Anzahl von Quartenteilungen, die bei den Griechen mehr oder weniger in Gebrauch waren. Besonders hebt er die Quartenteilungen hervor, die Archytas von Tarent für die drei Tongeschlechter der griechischen Musik vorgeschlagen hat:

Diatonisch	(9:8)·(8:7)·(28:27) = 4:3
Chromatisch	(32:27)·(243:224)·(28:27) = 4:3
Enharmonisch	(5:4)·(36:35)·(28:27) = 4:3.

Daß dem Zusammensetzen musikalischer Intervalle das Multiplizieren arithmetischer Brüche entspricht, diese Entdeckung war eine große Leistung früher exakter Wissenschaft; sie hat die Wechselwirkung zwischen Musiktheorie und Mathematik entscheidend bestimmt.

Unter dem Einfluß der aristotelischen Philosophie lockerte sich die Bindung von Musik und Mathematik. Musiktheorie wurde mehr als Einsicht in das Wesen musikalischer Phänomene verstanden, denn als metaphysische Spekulation. Kennzeichnend für diesen Auffassungswandel ist die Darstellung der drei Tongeschlechter durch Aristoxenos, einem Schüler des Aristoteles; er beschreibt die Quartenteilungen in dem phänomenologisch-psychischen Maßsystem von Ganz-, Halb- und Vierteltonstufen:

Diatonisch	1 + 1 + ½ = 2½
Chromatisch	1½ + ½ + ½ = 2½
Enharmonisch	2 + ¼ + ¼ = 2½

In der christlichen Spätantike wandte man sich wieder mehr der platonisch-pythagoreischen Erkenntnislehre zu, womit auch die Harmonielehre der Pythagoräer an Bedeutung gewann. Den Einklang von musikalischem und mathematischem Geist brachte am weitestgehenden Augustinus in seinen Büchern *„De musica“*[14] zum Ausdruck. Seine Definition der Musik als *„Scientia bene modulandi“* führte ihn zur Betrachtung der Zahlengesetzlichkeit in der Musik, insbesondere in deren rhythmischem und melodischem Ablauf, der als eine durch Zahlen geordnete Bewegung bezeichnet wird. In seinem letzten Buch, das er nach seiner Bekehrung schrieb, wandte er sich der theologischen Begründung der Musik zu, die er in Gott als tiefstem Wesensgrund und höchstem Wertmaßstab sah.

Trotz der großen Bedeutung, die Augustinus und seiner „De musica“ zukommt, war es nicht er, sondern der Römer Boëthius mit seinen fünf Büchern *„De institutione musica“* (500–507)[15], der für das Mittelalter zum Repräsentanten der antiken Musiklehre wurde. Was seine Bücher allerdings an Mathematik enthielten, war im wesentlichen nicht mehr als die euklidische Proportionenlehre. Die mathematische Struktur der Musik als Gegenstand einer Kontemplation des Grundes verlor an Bedeutung. Für das Mittelalter ging es dann vornehmlich um die mathematische Fundierung der Tonsysteme als Gefüge von Tonbeziehungen, die nach der Konsonanz bewertet wurden.

Wenn auch im Mittelalter keine grundsätzlich neuen Theoriebeziehungen zwischen Musik und Mathematik entstanden, so waren doch beide in der mittelalterlichen Bildungsordnung eng miteinander verbunden. Schon die Sophisten vor Plato hatten die vier Wissenschaften Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Harmonik zu einem Lehrprogramm zusammengefaßt. In der spätgriechisch-römischen Epoche wurde dieser Lehrkanon zu den *„artes liberales“* entfaltet, die das Mittelalter als die sieben freien Künste in sein Bildungssystem übernahm: diese gliederten sich in das Trivium, dem Grammatik, Dialektik und Rhetorik angehörten, sowie in das Quadrivium, in dem noch immer Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik vereint waren.

Der Umschwung der Musiktheorie zu Beginn der Neuzeit, der letztlich die weitgehende Lösung der Musiktheorie von der Mathematik zur Folge hatte, kann kaum deutlicher demonstriert werden als durch die Gegenüberstellung der fast gleichzeitig entstandenen Musikschriften von Johannes Kepler und René Descartes. Aus der Konstruierbarkeit regelmäßiger Vielecke begründete Kepler die harmonischen Proportionen konsonanter Intervalle und erkannte dann diese Proportionen in den Planetenbahnen wieder[16]. *So ist bei ihm die Urharmonie eine* *geometrische Idee, deren Beobachtung in verschiedenen Bereichen erst als Beweis für ihre Richtigkeit angesehen wird. Insoweit stellte Kepler eine Synthese von platonischer und aristotelischer Denktradition her*[17]. Descartes dagegen *begnügte sich nicht mehr mit einer zahlentheoretischen oder geometrischen Metaphysik, vielmehr postuliert er gleich am Beginn seines „Musicae Compendium" (1618) die Notwendigkeit, die ästhetischen Wirkungen von Musik nicht nur aufgrund der Struktur von Tönen, sondern darüber hinaus die Struktur von Musik weiter subjektivistisch-psychologisch zu begründen*[18].

Im neuen Zeitalter des Subjektivismus wurde die mathematisch-kosmische Begründung der Musiktheorie durch die Ästhetik des menschlichen Individuums verdrängt, wodurch die Bedeutung der Mathematik für die Musiktheorie prinzipiell eingeschränkt wurde. Daß trotzdem beachtliche Neuansätze der Verbindung von Musiktheorie und Mathematik gelangen, dafür sind Leonhard Eulers Beiträge zur Musiktheorie[19] ein überzeugendes Beispiel. Es waren gerade die ästhetischen Phänomene der Musik, die Euler mathematisch zu fassen versuchte. In Anlehnung an die Leibnizsche Auffassung, daß die Musik ein unbewußtes Zählen der Seele sei, definierte er zahlentheoretisch den *„gradus suavitatis"*, den Grad der Annehmlichkeit, der auf unterschiedlichste musikalische Phänomene wie Intervalle, Akkorde, Rhythmen und auch Formproportionen angewendet werden kann. Kernstück der Definition ist die Gradusfunktion Γ für natürliche Zahlen, die folgendermaßen erklärt ist: Ist eine natürliche Zahl a das Produkt der Primzahlpotenzen $p_1^{e_1}, p_2^{e_2}, \ldots, p_n^{e_n}$, dann ist $\Gamma(a) = 1 + \sum_{k=1}^{n} e_k p_k - \sum_{k=1}^{n} e_k$; da z. B. $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ ist, hat man $\Gamma(60) = 1 + (2{\cdot}2 + 1{\cdot}3 + 1{\cdot}5) - (2 + 1 + 1) = 9$, d. h. 60 hat als Grad der Annehmlichkeit den Wert 9. Die Gradusfunktion für (gekürzte) Brüche $\frac{a}{b}$ ergibt sich aus der Festsetzung $\Gamma\left(\frac{a}{b}\right) := \Gamma(a{\cdot}b)$; so hat z. B. die kleine Dezime 12:5 wie die natürliche Zahl 60 den Annehmlichkeitsgrad 9 (Abb. 3).

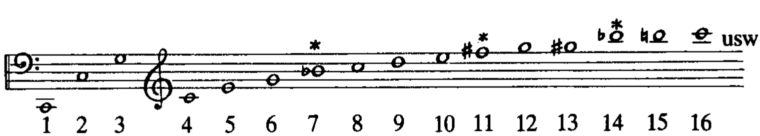
Von grundsätzlicherer Bedeutung als der gradus suavitatis ist Eulers Theorie der musikalischen Wahrnehmung, nach der komplizierte akustische Ereignisse oft durch einfachere Vorstellungen ersetzt werden. So werden in der Regel zwei Töne mit dem Frequenzverhältnis 800:401 als Oktave 2:1 wahrgenommen. Eulers Substitutionstheorie liefert nicht nur eine Rechtfertigung seiner zahlentheoretischen Definition des gradus suavitatis, sondern eröffnet die Einsicht, daß der gemeinsame

Γ	Intervalle
2	1/2
3	1/3 1/4
4	1/6 2/3; 1/8
5	1/5; 1/9; 1/12 3/4; 1/16
6	1/10 2/5; 1/18 2/9; 1/24 3/8; 1/32
7	1/7; 1/15 3/5; 1/20 4/5; 1/27; 1/36 4/9; 1/48 3/16; 1/64
8	1/14 2/7; 1/30 2/15 3/10 5/6; 1/40 5/8; 1/54 2/27; 1/72 8/9; 1/96 3/32; 1/128
9	1/21 3/7; 1/25 1/28 4/7; 1/45 5/9; 1/60 3/20 4/15 5/12; 1/80 5/16; 1/81; 1/108 4/27; 1/144 9/16; 1/192 3/64; 1/256
10	1/42 2/21 3/14 6/7; 1/50 2/25; 1/56 7/8; 1/90 2/45 5/18 9/10; 1/120 3/40; 5/24 8/15; 1/160 5/32; 1/162 2/81; 1/216 8/27; 1/288 9/32; 1/384 3/128; 1/512

Abb. 3. In dieser Eulerschen Tabelle sind alle Intervalle $\frac{a}{b}$ (a und b teilerfremd) aufgeführt, deren „gradus suavitatis" höchstens 10 ist (vgl. [6], Seite 39).

Ort von Musiktheorie und Mathematik mehr im menschlichen Bewußtsein als in der physikalischen Akustik zu sehen ist.

Der große Aufschwung der Physik im 18. und 19. Jahrhundert unterdrückte Eulers richtungweisende Erkenntnis und brachte mit sich, daß musiktheoretische Anwendungen der Mathematik sich auf den Bereich der physikalischen Grundlagen einengten. Insbesondere die Entdeckung der Obertöne (Abb. 4), deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der jeweiligen Grundfrequenz sind, beherrschte das musiktheoretische Denken; so schien der Durdreiklang durch sein Auftreten in der Obertonreihe endgültig eine natürliche Begründung zu finden. Das bedeutendste Dokument physikalisch-physiologischer Musiktheo-



* Das Sternchen bezeichnet die besonders abweichenden Approximationen

Abb. 4. Seit dem 18. Jahrhundert wird immer wieder die Obertonreihe, die hier vom Grundton C aus aufgeführt ist, als Bindeglied zwischen Musiktheorie und Mathematik herangezogen.

rie stellt *„Die Lehre der Tonempfindungen“* (1863) von Hermann von Helmholtz dar. In ihr unterscheidet Helmholtz deutlich zwischen naturwissenschaftlicher Grundlagenforschung und der davon abhängigen musikalischen Ästhetik. Mathematik kommt bezeichnenderweise nur im fachphysikalischen Anhang des Buches vor.

Eulers Substitutionstheorie erlebte, nachdem Immanuel Kant das hinter ihr liegende Erkenntnisproblem in seiner *„Kritik der reinen Vernunft“* ausführlich zur Sprache gebracht hatte, ihre Wiedererwekkung in den musiktheoretischen Schriften Hugo Riemanns, dem größten europäischen Musikforscher der Generation um die Wende zum 20. Jahrhundert.

Seit seiner neuartigen Dissertation, die er 1873 als *„Musikalische Logik“* veröffentlichte, war für Riemann das Hören von Musik aktives Handeln. Die Ansicht, *daß das Musikhören nicht nur ein passives Erleiden von Schallwirkungen im Hörorgan, sondern vielmehr eine hochgradig entwickelte Betätigung von logischen Funktionen des menschlichen Geistes ist*[20], war grundlegend für seine *„Ideen zu einer Lehre von den Tonvorstellungen“* (1914/15), die er der Helmholtzschen *„Lehre der Tonempfindungen“* entgegensetzte. Bei alledem blieb allerdings die Mathematik ausgeklammert; die Psychologie wurde zur zentralen Instanz für die neue Theorie der Musik.

Die Mathematik selbst entwickelte sich zum 20. Jahrhundert hin[21] auf eine neue Stufe der Abstraktion, was auch mit dem Wort von der *„Lösung der ontologischen Bindung“* gekennzeichnet wird. Auf der Grundlage der formalen Logik und Mengenlehre entstand die moderne Axiomatik, die ihren paradigmatischen Ausdruck in David Hilberts *„Grundlagen der Geometrie“* (1899) fand. Als abstrakte Theorie der Symmetrie trat die Gruppentheorie in den Vordergrund, die zum Vorbild der modernen Algebra wurde. Noch heute urteilt einer der führenden Vertreter der Mathematik, Michael Atiyah: *Die Gruppentheorie ist typisch für den modernen Geist der Mathematik, und der Begriff der Symmetriegruppe ist so grundlegend für das 20. Jahrhundert, wie es der Begriff einer Funktion noch für das 19. Jahrhundert war*[22].

Auf der einen Seite die überwiegend psychologisch orientierte Musiktheorie, auf der anderen Seite die sich vehement entwickelnde abstrakte Mathematik, dazwischen fast nichts mehr an Gemeinsamen: das war die Situation, in die Wolfgang Graeser 1906 geboren wurde. Er versuchte beide Seiten in einem kühnen Ansturm zusammenzuzwingen und ist daran gescheitert. Zwar ist ihm die Wiederbelebung der *„Kunst der Fuge“* für die Musikpraxis gelungen, doch ist sein bahnbrechender Entwurf einer mathematischen Musiktheorie ohne Resonanz geblieben.

Es waren nicht Musikwissenschaftler, die nach Graesers Tod die moderne Mathematik mit dem Musikdenken verbanden, sondern ein Komponist, Ernst Křenek, der in seinen bemerkenswerten Wiener Vorträgen *„Über neue Musik"* (1936) auch zum neuen Verhältnis von Musik und Mathematik Stellung nahm. Seine Betroffenheit von der neuen freieren Axiomatik drückte Křenek folgendermaßen aus: *Es gehört für mein Gefühl zu den großartigsten Ergebnissen der modernen Mathematik, in diesem Bereich ein neues Licht angezündet zu haben, und ich kann die entscheidenden Sätze des § 1 von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie" nie ohne die charakteristische Erschütterung wiederlesen, die die Begegnung mit fundamentalen Erkenntnissen auslöst ... Das Entscheidende an diesen so unscheinbaren Sätzen ist, daß Axiome nicht der Ausdruck von unbeweisbaren, aber ewigen, weil etwa naturgegebenen Wahrheiten sind, ... sondern daß die Axiome freie Festsetzungen des menschlichen Geistes sind, geschaffen zu dem Zweck, damit Geometrie möglich sei*[23]. Und er urteilte: *Da die Musik für uns nicht ein Verfahren darstellt, in welchem ein Naturmaterial der Wiedergabe psychischer Prozesse dienstbar gemacht wird, wobei eine wünschbare Vervollkommnung des Verfahrens von dem Grade zu erwarten wäre, in welchem man die Natur des Materials einerseits und die des psychischen Prozesses andererseits erforscht hat, sondern als Artikulation von Denkvorgängen mit den besonderen Mitteln der Tonsprache erkannt worden ist, so dürfen wir uns auch auf jene Auffassungen stützen, die die Autonomie des Denkens im Gebiet der Mathematik, und damit beispielgebend für alle geistigen Produktionen, festgelegt haben*[24].

Auch Křeneks Überlegungen zur musikalischen Axiomatik fanden keine unmittelbare Nachfolge. Erst seit 1960 erschienen musiktheoretische Arbeiten, vornehmlich in den angloamerikanischen Zeitschriften *„Journal of Music Theory"* und *„Perspectives of New Music"*, die musikalische Axiomatik in Form mathematischer Modelle behandelten. Von musikwissenschaftlicher Seite wurden diese Arbeiten, die sich überwiegend auf frei-atonale oder dodekaphone Musik beziehen, nicht zu Unrecht als musikalisch irrelevant kritisiert. Ihnen wurde sogar vorgeworfen: *die radikale Neuformulierung alter Sachverhalte und Fragestellungen, welche nicht nur in einzelnen Vokabeln, sondern mit Hilfe ganzer formaler Sprachschöpfungen vorgenommen wird, soll die Entdeckung verborgener, systematischer Theorien vortäuschen und deren Existenz beweisen*[25]. Ebenfalls kaum Widerhall bei der Wissenschaft fand ein Komponist wie Iannis Xenakis mit seinen Bemühungen, aktuelle mathematische Theorien für die Komposition nutzbar zu machen[26].

Axiomatische Musiktheorie mit den Mitteln modernster Mathematik, das hat in jüngster Zeit am weitestgehenden der Mathematiker und komponierende Pianist Guerino Mazzola betrieben. Wenn auch die Frage nach der musikalischen Relevanz für manche seiner theoretischen Ansätze und Methoden noch offen bleibt, so enthalten seine Untersuchungen[27] doch viel Substanz, von der motivischen Analyse bis hin zur Aufhellung umfangreicher Satzstrukturen. Die moderne Auffassung der Geometrie, daß Räume als Atlanten von Raumteilen zu verstehen sind, liefert das zentrale Muster für die Analyse musikalischer Kompositionen; so ist ein Kernstück die Definition einer interpretierten Komposition als ein Atlas von Teilkompositionen, die durch Symmetrietransformationen miteinander verglichen werden. Mit dieser Definition erhält Graesers Bestimmung der kontrapunktischen Form als Menge von Mengen von Mengen eine überzeugende Präzisierung – eine Präzisierung allerdings, die auch nicht jedem Mathematiker ohne weiteres zugänglich ist.

Musiktheorie und Mathematik: entstanden aus einem gemeinsamen Ursprung, vielfältig verbunden in einer wechselseitigen Geschichte, heute entfremdet durch unterschiedliche Entwicklung – wo liegt das Gemeinsame, das Verbindende, das Trennende? In der Antike waren Musiktheorie und Mathematik vereint in der metaphysisch verankerten Begründung des Tonsystems, dem Inbegriff des musikalisch Möglichen, und im Mittelalter trafen sie sich in der Fundierung der Tonbeziehungen als Ordnung göttlichen Ursprungs, was ihnen den gemeinsamen Platz im Bildungssystem der artes liberales gab. Als mit dem Beginn der Neuzeit nicht mehr Gott, sondern der Mensch als das erste Wirkliche Geltung bekam, als im Denken über Musik die Idee des Tonsystems durch die des Musikwerkes als zentrale Kategorie abgelöst wurde, da löste sich das enge Verhältnis von Musiktheorie und Mathematik. Die Theorie der Musik wurde zur ästhetischen Kunstlehre, für die *die Interpretation des musikalischen Kunstwerks als Realisierung von „Geist in geistfähigem Material" (Hanslick 1854) zur herrschenden Norm wurde*[28]; die Rolle der Mathematik wurde dabei mehr und mehr auf die physikalisch-akustischen Grundlagen eingeschränkt, was schließlich nach der Ablösung der Physik durch die Psychologie als grundlegender Erklärungsinstanz für das Denken und Fühlen von Musik die fast vollständige Trennung von Musiktheorie und Mathematik bedeutete.

Daß trotz alledem die Überzeugung nicht tot ist, daß Musik und Mathematik irgendwo miteinander verbunden sind, macht die Fragen wichtig: Warum mußte es zu dieser Entwicklung kommen? Und: Worin ist dennoch das Verbindende zu sehen? Es verwundert nicht, daß eine auf dem Menschen als Individuum gründende Wissenschaft zunehmend an Einheit einbüßt, was in der modernen Wissenschaft zu einer kaum mehr zu ertragenden Spezialisierung und Kompetenzabgrenzung geführt hat. Hartmut von Hentig hat diese Entwicklung und deren gegenwärtigen Zustand in seinem Buch *„Magier oder Magister? Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprozeß“* (1972) ausführlich dargestellt. Für die Zersplitterung der Wissenschaften sieht er als einen letzten Grund die Auffassung von Wissenschaft als methodenkritische Erkenntnis. *Sie läßt keine Erkenntnisweise unkritisiert, und das heißt im Wortsinn: sie eignet sich an, was sich ihrer Verfahrensrigueur fügt, und scheidet den Rest aus ... Eben dadurch jedoch konnten die Gegenstände der Wissenschaft unendlich zunehmen, und mit ihnen haben sich die sachspezifischen Methoden vermehrt*[29].

An der modernen Mathematik wird das mit erschreckender Klarheit deutlich. Die immer strenger werdenden Maßstäbe für Korrektheit und das fortwährende Erklimmen neuer Stufen der Abstraktion haben zu einer fantastischen Ausweitung mathematischer Methoden und Theorien geführt. So gliedert heute das Klassifikationsschema der American Mathematical Society die Mathematik in 60 Hauptgebiete mit ca. 3000 Teilgebieten, von denen kaum eines von einem einzelnen Experten vollständig beherrscht wird. Natürlich verkümmern bei einer solchen Überspezialisierung Kategorien wie Sinn, Bedeutung und Zusammenhang. Beispielgebend sei hier nur der Bereich des Verstehens angeführt, den die Mathematiker allzu oft durch die Frage nach dem Richtig oder Falsch verengen. Es ist sicherlich mehr als nur eine Karikatur, wenn in einer (bezeichnenderweise mehreren großen Mathematikern zugeschriebenen) Anekdote dem Mathematiker im Anschluß an einen Konzertbesuch in den Mund gelegt wird: „Na, und was ist damit bewiesen?“

Anders als auf die Mathematik wirkte sich die methodenkritische Wissenschaftsauffassung und die aus ihr resultierenden Kompetenzabgrenzungen auf die Musiktheorie aus: sie wurde zunehmend von den sie umgebenden Wissenschaften Musikgeschichte, Musikpsychologie und Musikästhetik in den Schatten gestellt. Bezeichnend ist, daß ein so hervorragender Musikforscher wie Hugo Riemann keinen musikwissenschaftlichen Lehrstuhl bekam. Die Verdrängung der Musiktheorie ging so weit, daß Albert Wellek, der in Deutschland die Musikpsychologie für Jahrzehnte beherrschte, die Musiktheorie ganz aus der Systematischen Musikwissenschaft verbannte[30]. So überlebte die Musiktheorie nur noch als Handwerkslehre an den Musikhochschulen. Es war dann auch die musikalische Praxis, und zwar vornehmlich die Avantgarde der

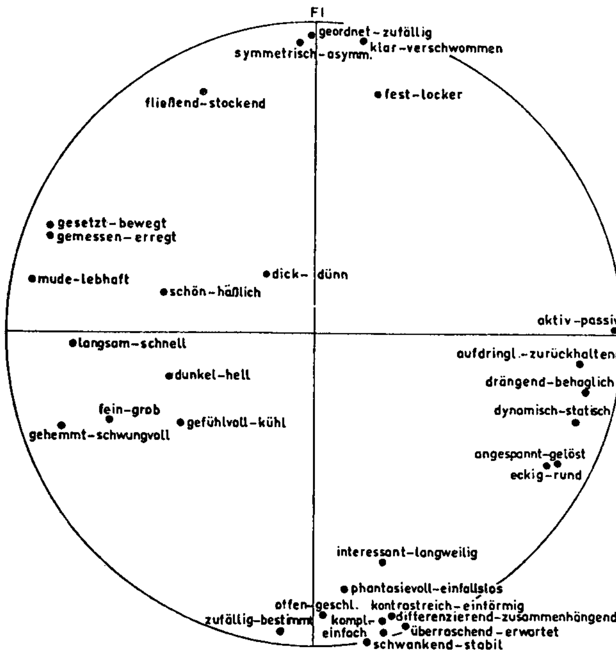
Neuen Musik, die die Musikwissenschaft zu einer erneuten Befassung mit der Theorie herausforderte.

Das Bild des Dilemmas ist gezeichnet! Wie kommen wir nun aus diesem Dilemma heraus? Nach Hartmut von Hentig müssen die Wissenschaften sich grundsätzlich umorientieren: *Die immer notwendiger werdende Restrukturierung der Wissenschaften in sich – um sie besser lernbar, gegenseitig verfügbar und allgemeiner (d. h. auch jenseits der Fachkompetenz) kritisierbar zu machen – kann und muß nach Mustern vorgenommen werden, die den allgemeinen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsformen unserer Zivilisation entnommen sind und die ich abkürzend „Anschauung" nennen will*[31]. Restrukturierung der Mathematik meint, daß Mathematik als allgemeines Verständigungsmittel entwickelt wird, mit dem als einer „Gemeinsprache der formalen Erkenntnis" Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsstrukturen ausgedrückt und behandelt werden[32]. Restrukturierung der Systematischen Musikwissenschaft meint, daß sich in ihr eine Theorie der Musik entfaltet, die in voller Breite Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsformen in der Musik aufnimmt und allgemein verstehbar macht. Mit den absichtlich parallelen Formulierungen sollen Ansätze für ein neues Zusammenwirken von Musiktheorie und Mathematik aufgezeigt werden. Musikerleben als Leistung des Bewußtseins ist durchdrungen von formalen Elementen, für deren Erkennen, Beschreiben und Verstehen die Mathematik als Partner herangezogen werden sollte.

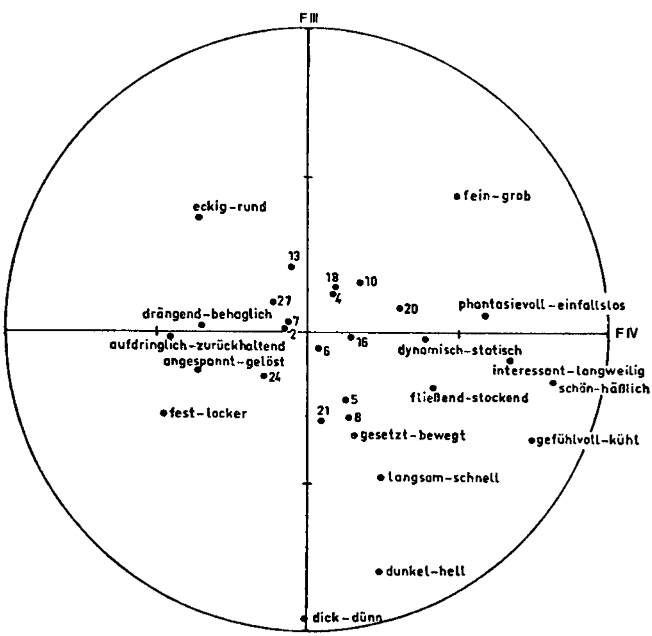
Um die Art und Weise deutlich werden zu lassen, wie Mathematik im Sinne der Restrukturierung einbezogen werden soll, wird zunächst ein Beispiel angeführt, in dem der Einsatz mathematischer Methoden kritisch beurteilt wird. Gewählt wird mit Bedacht eine der sorgfältigsten und methodisch durchdachtesten Untersuchungen zur Systematischen Musikwissenschaft, Peter Faltins Habilitationsschrift *„Phänomenologie der musikalischen Form"* (1979), in der mathematische Methoden wie in vielen musikpsychologisch orientierten Untersuchungen im Rahmen statistischer Verfahren eingehen. Ausgangspunkt war für Faltin die Arbeitshypothese: *Musikalische Form ist ein System von Beziehungen, deren Sinn aus den Noten allein nicht abzulesen ist, sondern erst im Prozeß der ästhetischen Wahrnehmung generiert wird*[33]. Damit waren musikpsychologische Experimente notwendig, die kurz skizziert werden sollen: Musikalisch geschulte Versuchspersonen hatten methodisch

---

Abb. 5. Der vierdimensionale Bedeutungsraum musikalischen Erlebens wird dargestellt ▷ durch zwei Ebenenschnitte, die die Koordinatenachsen I/II *(Strukturordnung/Aktivität)* und III/IV *(Klang/Ästhetische Wertung)* enthalten ([12], Seiten 49f.).



F I
F II
geordnet-zufällig
symmetrisch-asymm.
klar-verschwommen
fließend-stockend
fest-locker
gesetzt-bewegt
gemessen-erregt
mude-lebhaft
dick-dünn
schön-häßlich
aktiv-passiv
langsam-schnell
aufdringl.-zurückhaltend
dunkel-hell
drängend-behaglich
fein-grob
dynamisch-statisch
gehemmt-schwungvoll
gefühlvoll-kühl
angespannt-gelöst
eckig-rund
interessant-langweilig
phantasievoll-einfallslos
offen-geschl.
kontrastreich-eintörmig
zufällig-bestimmt
kompl.-einfach
differenzierend-zusammenhängend
überraschend-erwartet
schwankend-stabil



F III
F IV
eckig-rund
fein-grob
13
18
10
4
27
20
phantasievoll-einfallslos
drängend-behaglich
7
2
16
6
aufdringlich-zurückhaltend
dynamisch-statisch
angespannt-gelöst
interessant-langweilig
24
schön-häßlich
5
fließend-stockend
fest-locker
21
8
gesetzt-bewegt
gefühlvoll-kühl
langsam-schnell
dunkel-hell
dick-dünn

zusammengestellte Musikbeispiele zu beurteilen; sie hielten ihre Urteile fest in einem sogenannten Polaritätsprofil, einer Liste von 30 Eigenschaftswortpaaren wie z. B. offen – geschlossen, klar – verschwommen, müde – lebhaft. Der so entstandene Datensatz wurde dann mit dem Verfahren der Faktorenanalyse ausgewertet, wobei die Eigenschaftswortpaare in einem Bedeutungsraum durch Punkte dargestellt werden (Abb. 5), deren Lage ihren jeweiligen Bedeutungszusammenhang wiedergeben soll. Die Annahme, daß der Bedeutungsraum ein analoges Meßniveau wie der geometrische Raum der Anschauung hat, erlaubt, die Punkte durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu erfassen, deren Achsen (genannt Faktoren) als Erlebnisdimensionen interpretiert werden. So werden vier grundlegende Dimensionen des Musikerlebens nachgewiesen, die Faltin mit den Worten *„Strukturordnung“, „Aktivität“, „Klang“* und *„Ästhetische Wertung“* benannt hat.

Zu kritisieren ist – diese Kritik trifft allgemein faktorenanalytische Untersuchungen der Psychologie –, daß das mathematische Modell des Bedeutungsraumes meßtheoretisch nicht gerechtfertigt wird. Der durchaus intensiv einbezogenen Mathematik fällt so die Rolle eines Orakels zu. Kennzeichnend ist, daß trotz der Warnung, die Koordinatenachsen im Bedeutungsraum nicht als reale Gegebenheiten anzusehen, diese Achsen immer wieder inhaltlich gedeutet werden. Die orakelhafte Aussage, daß sich der emotionale Eindruck von Musik in einem vier- (oder fünf-) dimensionalen Raum darstellen läßt[34], hilft nicht, sie verstellt eher den Weg zu einem angemessenen und kontrollierten Umgang mit mathematischem Denken im Bereich der Musik.

Wie man sich ein unmittelbares Zusammenwirken von Musik- und Mathematikdenken vorstellen kann, soll ein weiteres Beispiel vermitteln. Seit Gioseffo Zarlino im 16. Jahrhundert das neu entstandene Harmoniekonzept aus der Musikpraxis in die Musiktheorie übernahm[35], hat man sich um dessen begriffliche Durchdringung bemüht. Jean-Philippe Rameau, von seinen Zeitgenossen als der Newton der Musik betrachtet, gelang im 18. Jahrhundert die nachhaltigste begriffliche Fassung, indem er die Fülle harmonischer Phänomene auf nur wenige Grundprinzipien – Akkordumkehrung, Terzenschichtung, Fundamentbaß – reduzierte[36]. Bis heute sind Rameaus Prinzipien aktuell geblieben, was an systematischen Abhandlungen zur Harmonik wie der von Franz Alfons Wolpert (1972) sichtbar wird[37].

Es soll nun kurz skizziert werden, wie man von Akkordvorstellungen zu Akkordbegriffen und deren Merkmalbeschreibungen durch mathematisch-methodische Überlegungen gelangen kann. Da harmonisch-tonale Musik (bis ins 20. Jahrhundert) auf dem Grundmuster der

	Harmonieformen	Ø	1	12	13	14	123	124	125	126	135	$\overline{135}$	$\overline{126}$	$\overline{125}$	$\overline{124}$	$\overline{123}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{Ø}$
Ø	Pause	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1	Einklang		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
12	Sekunde			x			x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
13	Terz				x		x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
14	Quart					x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
123	quintseptfreier Nonakkord						x						x		x	x	x	x	x	x	x
124	quintfreier Septakkord							x				x	x	x		x	x	x	x	x	x
125	terzseptfreier Nonakkord								x				x	x	x		x	x	x	x	x
126	terzfreier Septakkord									x		x		x	x	x	x	x	x	x	x
135	Dreiklang										x	x	x		x		x	x	x	x	x
$\overline{135}$	kompakter Septakkord											x					x	x		x	x
$\overline{126}$	septfreier Nonakkord												x				x	x	x	x	x
$\overline{125}$	quintnonfreier Undezakkord													x			x		x	x	x
$\overline{124}$	terzfreier Nonakkord														x		x	x	x	x	x
$\overline{123}$	quintfreier Nonakkord															x		x	x	x	x
$\overline{14}$	nonfreier Undezakkord																x			x	x
$\overline{13}$	kompakter Nonakkord																	x		x	x
$\overline{12}$	septfreier Undezakkord																		x	x	x
$\overline{1}$	kompakter Undezakkord																			x	x
$\overline{Ø}$	kompakter Tredezakkord																				x

Abb. 6. Die Tabelle gibt die Enthaltenseinsrelation für die Harmonieformen der diatonischen Tonleiter an; z. B. besagt das Kreuz im Schnitt der Zeile 126 und der Spalte $\overline{123}$, daß ein terzfreier Septakkord stets in einem quintfreien Nonakkord enthalten ist.

siebenstufigen Tonleiter beruht, bietet sich zur Vereinfachung die Beschränkung auf diese Skala an, d. h. Akkorde lassen sich durch Teilmengen der Zahlenmenge {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} repräsentieren. Einfache Zusammenhänge zwischen Akkordvorstellungen spiegeln sich in Aussagen wider wie „ein Septakkord enthält einen Dreiklang". Auf dem Weg zu Begriffen leitet das Denken aus Vorstellungen Gegenstände und Merkmale ab, was beispielhaft verdeutlicht werden soll an der geänderten Formulierung „ein Septakkord als Gegenstand hat das Merkmal, einen Dreiklang zu enthalten". In der Begriffslehre wird ein Begriff als das Insgesamt seiner Gegenstände und Merkmale erklärt, was für beschränkte Gegenstands- und Merkmalsbereiche eine mengensprachliche Begriffsanalyse ermöglicht. Leitet man für Akkorde wie angedeutet Gegenstände und Merkmale ab (Abb. 6), so liefert die formale Begriffsanalyse[38] für die siebenstufige Tonskala ein hierarchisches System von 42 Akkordbegriffen (Abb. 7). Ein derartiges Begriffssystem erweist sich als hilfreich für die Suche geeigneter Merkmalsysteme, wobei die durchsichtige mathematische Ableitung eine auch

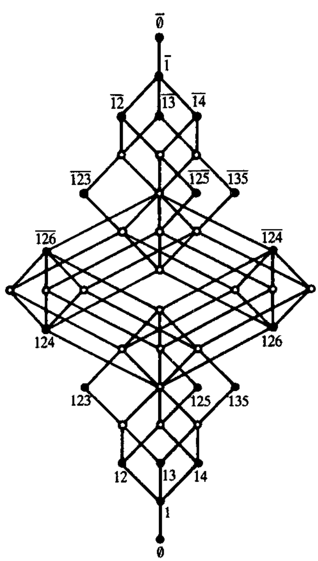


Abb. 7. Die kleinen Kreise des Diagramms stellen die 42 Akkordbegriffe dar, die aus der Tabelle in Abb. 14 ableitbar sind; der am weitesten links aufgeführte Kreis steht z. B. für den Begriff, der als Gegenstände die Harmonieformen $\emptyset$, 1, 12, 13, 14, 123, 124 umfaßt und als Merkmale das Enthaltensein in den Harmonieformen $\overline{\emptyset}$, $\overline{1}$, $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{123}$, $\overline{126}$ beinhaltet.

inhaltlich begründete Auswahl ermöglicht; gewonnen werden dazu Erkenntnisse der Art, daß ein vollständiges Merkmalsystem für die Akkordbegriffe der siebenstufigen Tonskala mindestens 13 (einfache) Merkmale umfassen muß. Die skizzierte Methode läßt sich auch benutzen, um bestehende Begrifflichkeiten der Harmonik von Rameau bis Wolpert zu analysieren und einzuordnen.

Entscheidend ist, daß sich mathematische Methoden möglichst eng an musiktheoretische Intentionen anlehnen, damit stets – selbst bei komplizierteren Gedankengängen – auch musikalisch begründbare Urteile möglich sind. Da die Musiktheorie als wichtige Aufgabe die kategoriale Formung musikalischen Erlebens hat, bietet sich gerade die formale Begriffsanalyse als eine erfolgversprechende Methode an. Es sei angemerkt, daß die formale Begriffsanalyse aus langjährigen Bemühungen um die Restrukturierung von Mathematik entstanden ist und sich in Grundvorlesungen für Sozialwissenschaftler gerade als Verständigungsmittel bewährt hat[39].

Die lange gemeinsame Geschichte hat natürlich manche mathematischen Bruchstücke in der Musiktheorie zurückgelassen. Daß diese häufig mehr Verwirrung stiften als nützen, soll an einem einfachen Beispiel, einem Zitat aus Herbert Eimerts „Lehrbuch der Zwölftontechnik“ (1952), demonstriert werden: *Dagegen bleibt zu bedenken, daß der Tritonus nicht nur aus sechs Halbtönen besteht, sondern daß er selbst der siebte Ton ist, deren es im ganzen zwölf gibt. Der Tritonus halbiert zwar die Oktave, aber er teilt auch die Zwölftonreihe (von c bis h) im Verhältnis 7:12, – das ist alles andere als „neutral“, die wahre Kabala der Musik, ein tief magisches Verhältnis, über welches das Denken nicht mehr zur Ruhe kommt*[40].

Die unzulässige Vermischung von Ordinal- und Kardinalzahlen, durch die im Zitat dem Tritonus tiefe Magie angehängt wird, ist Ausdruck einer tieferliegenden Unstimmigkeit, die immer wieder im musiktheoretischen Denken aufbricht und dadurch entsteht, daß sich das Denken in Tönen und das Denken in Intervallen gegeneinander querstellen. Derartige Probleme lassen ein abgestimmtes mathematisches Sprachsystem für die Musiktheorie als wünschenswert erscheinen, auf das im Rückgriff Unklarheiten beseitigt und Erkenntnisse gesichert werden können. *Für ein solches Sprachsystem eignet sich* – wie ich näher in meiner Untersuchung *„Mathematische Sprache in der Musiktheorie“* ausgeführt habe – *die Form einer extensionalen Standardsprache im Sinne von Helmut Schnelle. Eine Standardsprache der Musiktheorie gewinnt man aus der musiktheoretischen Fachsprache durch Explikation der logischen Form und der Begriffe, wobei die radikale Reduktion von*

Mehrdeutigkeiten und Vagheiten angestrebt wird. Die Genauigkeit der Darstellung soll in einer Standardsprache durch systematische Verwendung von Grammatik und Wörtern der Fach- bzw. Gemeinsprache einen derart hohen Grad erreichen, daß die Standardsprache als unmittelbares Übersetzungskorrelat einer logischen Zeichensprache (Konstruktsprache) verstanden werden kann. Besondere Klarheit erhält die extensionale Standardsprache der Musiktheorie dadurch, daß ihre syntaktischen Ausdrucksgestalten nur Mengen, Elemente von Mengen oder Wahrheitswerte bezeichnen, daß man in ihr also die Begriffe auf ihren Umfang hin expliziert vorfindet und daß die logische Form als Prädikatenlogik bereitsteht[41]. Starke Impulse erhält die Entwicklung einer musiktheore-

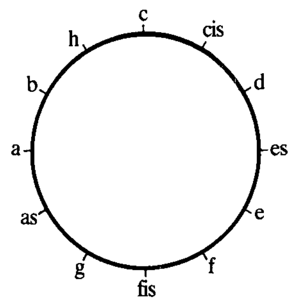


Abb. 8. Die Sprachebene der gleichstufigen 12-Ton-Skala wird häufig (bei Einschränkung auf den Oktavbereich) durch ein Kreisbild veranschaulicht.

Hisis	cisis	disis	eisis	fisis	gisis	aisis	hisis	cisis′
His	cis	dis	eis	fis	gis	ais	his	cis′
H	c	d	e	f	g	a	h	c′
B	ces	des	es	fes	ges	as	b	ces′
Heses	ceses	deses	eses	feses	geses	asas	heses	ceses′

Abb. 9. Die Sprachebene der Tonnamen (Noten) läßt sich durch ein zweidimensionales Gitter darstellen.

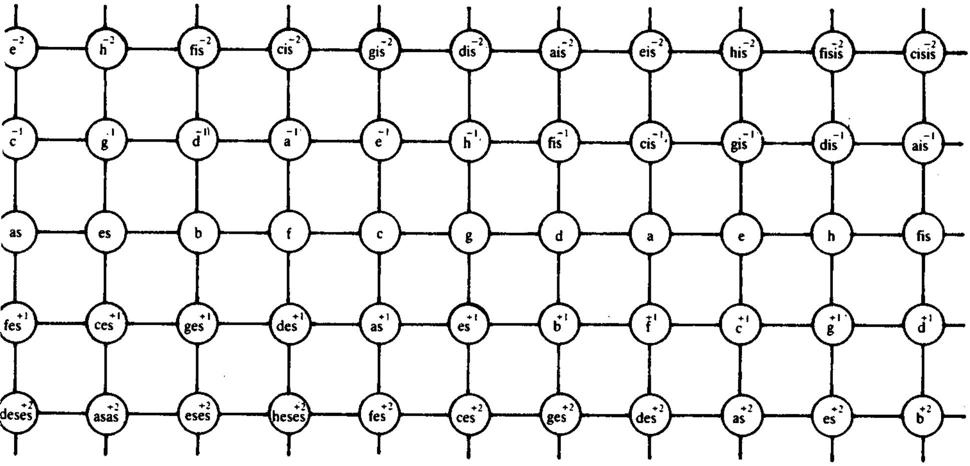
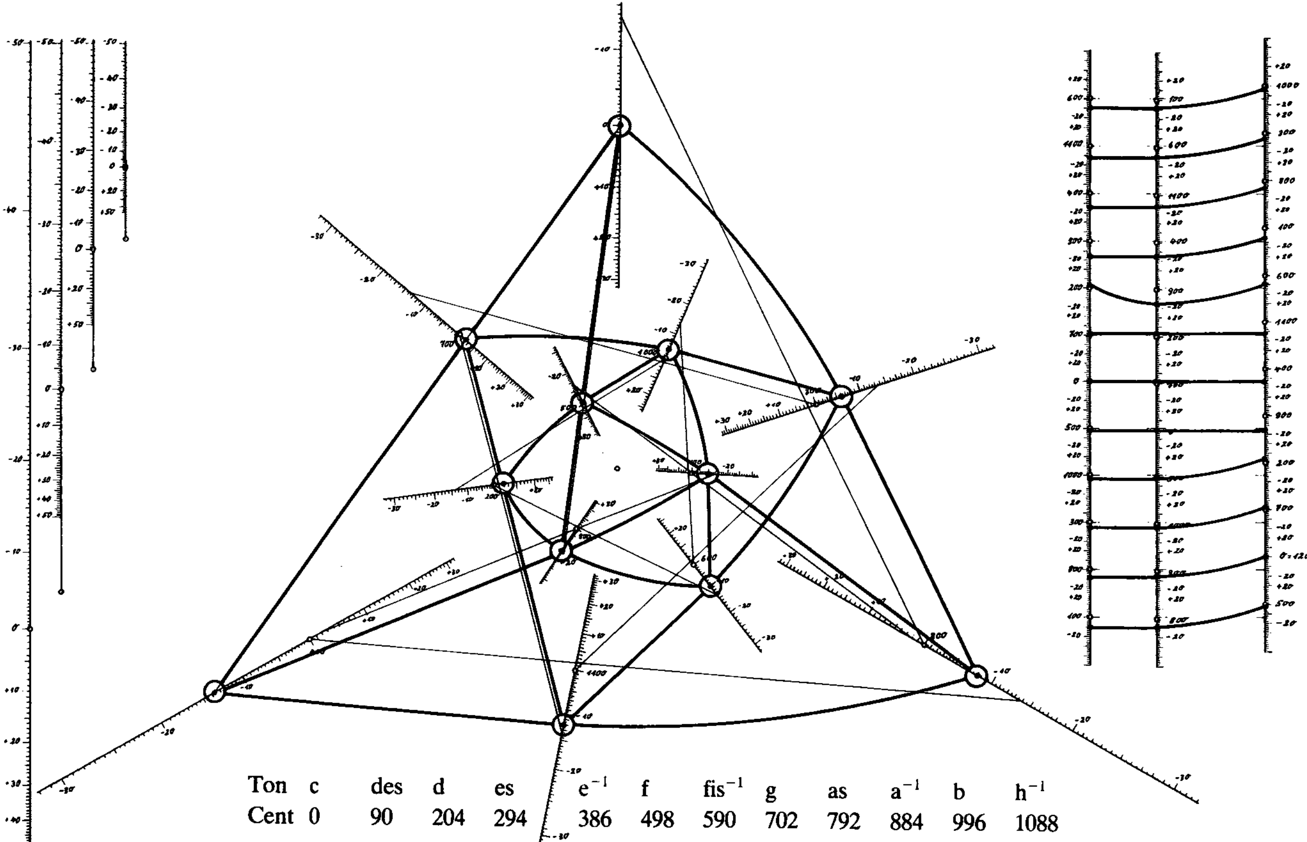


Abb. 10. Die Sprachebene der „reinen Stimmung“ wird durch mehrdimensionale Gitter wiedergegeben; das aufgeführte Tonnetz beschreibt die Töne, die aus einem Bezugston (beispielsweise c) durch wiederholtes Abtragen von reinen Quinten und reinen großen Terzen gewonnen werden können.

tischen Standardsprache heute besonders aus dem Bereich Musik und Computer[42].

Bei den bisherigen Arbeiten zu einer extensionalen Standardsprache der Musiktheorie, die im Rahmen eines Forschungsvorhabens *„Mathemathische Musiktheorie“* an der Technischen Hochschule Darmstadt durchgeführt wurden, hat sich die Trennung gewisser Sprachebenen bewährt. So ist die Sprachebene der gleichstufigen 12-Ton-Skala, bei der man sich die Töne durch die Klaviertasten repräsentiert denken kann (Abb. 8), zu unterscheiden von der Sprachebene der Tonnamen, die in den Noten ihr Abbild finden (Abb. 9). Eine weitere Sprachebene liefert die „reine Stimmung“, für die die auf Euler zurückgehende Darstellung durch mehrdimensionale Gitter[43] üblich geworden ist (Abb. 10). Gerade für die Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den unterschiedlichen Sprachebenen sind mathematische Sprachmittel kaum zu entbehren.

In der Sprache der Musiktheorie gibt es eine ganze Reihe von Ausdrücken, die anzeigen, daß musiktheoretisches Denken auch von geometrischen Vorstellungen begleitet ist; man denke etwa an Worte wie „hoch“, „tief“, „Tonstufe“, „Tonleiter“, „Tonabstand“, „Intervall“, „Quintenzirkel“ usw. Ein nicht geringer Einfluß kommt dabei sicherlich aus der Geometrie der Instrumente und der Notationssysteme. Allgemein dürfte die geometrische Veranschaulichung musik-



Ton	c	des	d	es	e^{-1}	f	fis^{-1}	g	as	a^{-1}	b	h^{-1}
Cent	0	90	204	294	386	498	590	702	792	884	996	1088

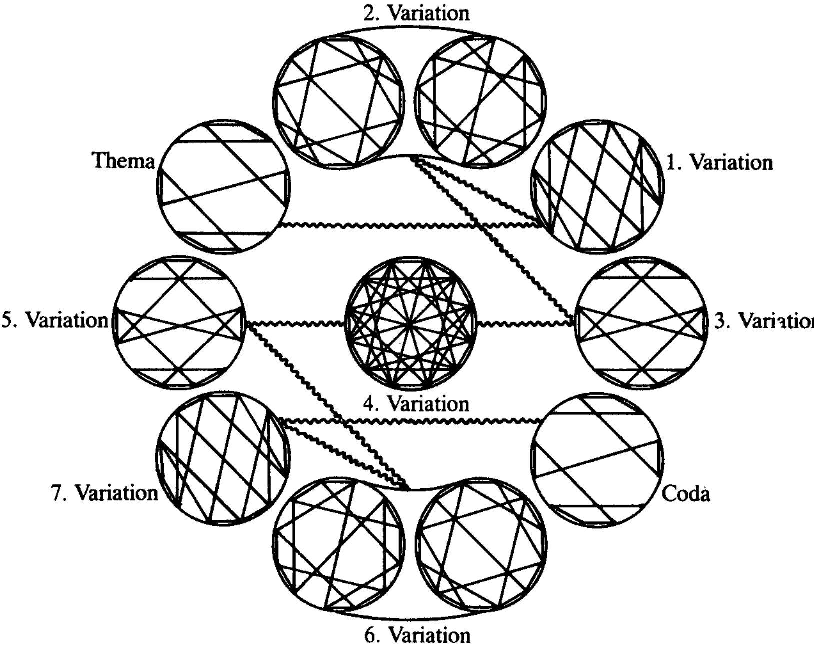


Abb. 12. Die Abbildung veranschaulicht die Symmetriestruktur des zweiten Satzes der Sinfonie op. 21 von Anton Webern. Die auftretenden Zwölftonreihen sind jeweils in den Kreis der Halbtonstufen als Streckenzüge eingetragen. Dreht man das Schaubild um 180°, so erkennt man die Hauptsymmetrie der Komposition: wie die Reihe selbst gleicht der ganze Satz einer Transposition seines Krebses ([41], Seite 17).

theoretischen Denkens viel zum Verstehen formaler Zusammenhänge in der Musik beitragen. So ist auch hier die Mathematik mit herausgefordert, systematisch geometrische Darstellungsmittel für musiktheoretische Sachverhalte zu entwickeln. In meinem Artikel *„Symmetrien in der Musik – Thema für ein Zusammenspiel von Musik und Mathematik“* habe ich von einigen Untersuchungen, bei denen die Veranschaulichung von Symmetrien im Vordergrund steht, berichtet (Abb. 11 und 12).

◁ *Abb. 11.* In dem Diagramm der zwölf (konzentrischen) Skalen können unterschiedliche Stimmungsvorschläge für Tasteninstrumente veranschaulicht werden. Die zwölf Töne von c bis h sind jeweils nach ihrer Tonhöhe (in Cent) in eine der Skalen einzutragen und durch Kurven zu verbinden, wenn sie einen Durdreiklang bilden. Je reiner der jeweilige Durdreiklang eingestimmt ist, desto weniger ist die zugehörige Kurve gekrümmt. In das Diagramm ist ein Stimmungsvorschlag von Johann Philipp Kirnberger (1721–1783) eingezeichnet, den möglicherweise J. S. Bach seinem „Wohltemperierten Klavier“ zugrunde gelegt hat ([41], Seite 15).

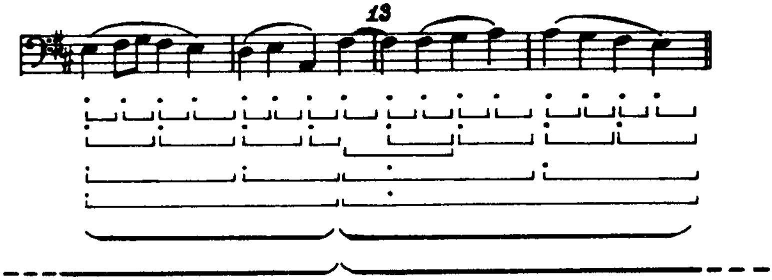


Abb. 13. Im Musikdenken hat ein Zeitpunkt als Ende einer Tondauer eine andere Qualität als derselbe Zeitpunkt zu Beginn einer Tondauer. Deshalb sind in dem angegebenen Beispiel ([22], Seite 126) die Zeitpunkte zwischen den Tönen durch die Gliederungsklammern zweigeteilt.

Daß bei ihrer Zusammenarbeit nicht nur die Mathematik der Musiktheorie ihre Denkmuster auflegt, sondern die Musiktheorie aus dem Musikdenken erwachsend auch die Mathematik zum Umdenken veranlassen kann, soll abschließend an einem Beispiel aufgezeigt werden. Das Messen der Zeit durch reelle Zahlen steht in einem eigenartigen Konflikt mit den Vorstellungen von Tondauern (Abb. 13). Die Vorstellung von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Tönen wirft die Frage auf: Was ertönt zum Zeitpunkt der Ablösung des ersten Tones durch den zweiten? Ist es noch der erste Ton oder schon der zweite? Sind es gar beide oder ertönt nichts? Seit der griechischen Antike ist dieses Problem in der Form eines der Zenonischen Paradoxien bekannt, die besagt, *daß der fliegende Pfeil in jedem Augenblick an einem Ort ist, also in keinem Augenblick den Ort wechselt, somit überhaupt ruht*[44]. Offenbar liegt das Problem im Verhältnis von Dauer und Augenblick. Eine sorgfältige Ableitung der Zeitbegriffe aus den Dauern als Zeitvorstellungen mit Methoden der formalen Begriffsanalyse – ganz entsprechend der beschriebenen Ableitung der Akkordbegriffe – liefert das überraschende Ergebnis, daß die Zeitpunkte nicht die kleinsten Zeitbegriffe sind, sondern jeweils in einen Endteil und einen Anfangsteil zerfallen[45]. Das löst auch das Problem der unmittelbar aufeinanderfolgenden Töne: der erste Ton erklingt abschließend zum Endteil des Ablösungszeitpunktes, worauf unmittelbar zum Anfangsteil des Ablösungszeitpunktes der zweite Ton einsetzt. Um in diesem Sinne die Zeit messen zu können, muß man jede der reellen Zahlen in zwei neue Zahlen aufspalten – auch für Mathematiker ein ungewohnter Gedanke! In seiner Antwort auf die Zenonische Paradoxie kam Aristoteles dieser verfeinerten Zeitauffassung sehr nahe; er schreibt: *Die Zeit besteht nicht* *aus Zeitpunkten, sondern diese sind nur die Grenzen der „Zeiten“*[46] (Dauern).

Vor zehn Jahren habe ich in einem Vortrag zum Studium Generale der Universität Freiburg schon einmal über die gleiche Thematik vorgetragen, damals unter dem Titel *„Mathematik und Musiktheorie“*[47]. Inhalt des Vortrages war der Versuch von Antworten auf die Frage: *Was kann Mathematik heute für die Musiktheorie leisten?* Die Antworten waren konzentriert in sieben Thesen, die an Aktualität nichts eingebüßt haben. Als abrundende Ergänzung sollen die programmatischen Thesen noch einmal aufgeführt werden.

These 1: Mathematik kann die Grundlage für eine Theoriesprache der Musik abgeben.

These 2: Eine mathematische Theoriesprache der Musik ermöglicht (und erzwingt) exakte Definitionen musiktheoretischer Begriffe.

These 3: Mathematik kann methodische Hilfe bei der Explikation musiktheoretischer Begriffe geben.

These 4: Mathematik kann vollständige und effektive Bezeichnungssysteme für musiktheoretische Begriffe bereitstellen.

These 5: Mathematik liefert der Musiktheorie Verfahren für deduktives Schließen.

These 6: In einer mathematischen Theoriesprache der Musik kann man zu Fragestellungen vollständige Übersichten der möglichen Lösungen angeben.

These 7: Mathematik regt die Musiktheorie zu neuen Begriffsbildungen und Untersuchungen an[48].

Wolfgang Graeser wäre heute 77 Jahre alt. Wie es wohl um das Verhältnis von Musiktheorie und Mathematik stände, wenn er mehr als 50 Jahre hätte weiterarbeiten können? Hätte er seinen bahnbrechenden Entwurf einer mathematischen Musiktheorie in voller Breite ausgeführt? Hätte er das antikisch-statische Theoriegerüst durch eine faustisch-dynamische Konstruktion überhöht? Hätte er gar – aus seiner Einsamkeit auf eisigen, sturmdurchtobten Höhen zurückgekehrt – den Drang nach Erkenntnis des absolut Gültigen überwunden? Diese Fragen müssen unbeantwortet bleiben. Vielleicht stände für Wolfgang Graeser heute gegen Ende des 20. Jahrhunderts – mehr als das Tonsystem, mehr noch als das Kunstwerk – die Verständigung über Musik im Zentrum des Interesses.

Anmerkungen

1 H. Riemann: Geschichte der Musiktheorie [28], Seite VII.
2 W. Graeser: Bachs „Kunst der Fuge“ [13], Seite 12.
3 [13], Seite 17.
4 W. Graeser: Neue Bahnen in der Musikforschung [14], Seite 302.
5 [14], Seite 303.
6 [14], Seite 303.
7 H. Zurlinden: Wolfgang Graeser [51], Seite 93.
8 [14], Seite 303.
9 H. Schmidt: Philosophisches Wörterbuch [30], Seite 175.
10 B. L. van der Waerden: Die Pythagoräer [36], Seite 104.
11 Vgl. auch B. L. van der Waerden: Die Harmonielehre der Pythagoräer [35].
12 [36], Seite 371.
13 Vgl. hierzu I. Düring: Die Harmonielehre des Klaudios Ptolemaios [10].
14 Augustinus: De musica [2].
15 Vgl. hierzu M. Bense: Konturen einer Geistesgeschichte der Mathematik II [4], Seiten 187f.
16 Vgl. hierzu J. Kepler: Harmonice mundi [19].
17 H. de la Motte-Haber, P. Nitsche: Begründungen musiktheoretischer Systeme [25], Seite 53.
18 [25], Seite 54.
19 Vgl. hierzu H. R. Busch: Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie [6].
20 H. Riemann: Ideen zu einer „Lehre von den Tonvorstellungen“ [29], Seite 14.
21 Vgl. D. J. Struik: Abriß der Geschichte der Mathematik [32].
22 M. Atiyah: Wandel und Fortschritt in der Mathematik [1], Seiten 211f.
23 E. Křenek: Über neue Musik [21], Seiten 80f.
24 [21], Seite 82.
25 M. Stroh: Mathematik und Musikterminologie [31], Seite 51.
26 Vgl. hierzu I. Xenakis: Formalized music, thoughts and mathematics in composition [48].
27 Vgl. hierzu G. Mazzola: Gruppen und Kategorien in der Musik [23].
28 C. Dahlhaus: Musikwissenschaft und Systematische Musikwissenschaft [7], Seite 39.
29 H. von Hentig: Magier oder Magister? [16], Seite 27.
30 Vgl. A. Wellek: Musikpsychologie und Musikästhetik [38], Seiten 8f.
31 [16], Seiten 33f.
32 Allgemeine Überlegungen zur Restrukturierung von Mathematik finden sich in [9] und [42].
33 P. Faltin: Phänomenologie der musikalischen Form [12], Seite VII.
34 Vgl. H. de la Motte-Haber: Musikalische Hermeneutik und empirische Forschung [24], Seiten 191ff.; Kritik an der inhaltlichen Deutung von Dimensionen findet man z.B. in: P. R. Hofstätter, D. Wendt: Quantitative Methoden der Psychologie [18], Seite 204.
35 Vgl. G. Zarlino: Istitutioni harmoniche [50].
36 Vgl. J.-Ph. Rameau: Traité de l'harmonie [26].
37 F. A. Wolpert: Neue Harmonik [47].
38 Vgl. R. Wille: Liniendiagramme hierarchischer Begriffssysteme [46], Seiten 46f.
39 Vgl. hierzu [9], [42], [43] und [44].
40 H. Eimert: Lehrbuch der Zwölftontechnik [11], Seite 13.
41 R. Wille: Mathematische Sprache in der Musiktheorie [40], Seite 170.

42 Vgl. hierzu die Bibliographien [20] und [33].
43 Vgl. hierzu M. Vogel: Die Lehre von den Tonbeziehungen [34], Seiten 102ff.
44 Zitiert nach [37], Seite 431.
45 Vgl. R. Wille: Zur Ordnung von Zeit und Raum [45].
46 Zitiert nach [37], Seite 431.
47 Vgl. R. Wille: Mathematik und Musiktheorie [39].
48 [39], Seiten 238ff.

Literatur

[1] Atiyah, M.: Wandel und Fortschritt in der Mathematik. In: M. Otte (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1974, 203–218
[2] Augustinus, A.: De musica. Deutsche Übertragung von C. J. Perl, Paderborn 1937
[3] Becker, O.: Frühgriechische Mathematik und Musiklehre. Archiv für Musikwissenschaft *14* (1957), 156–164
[4] Bense, M.: Konturen einer Geistesgeschichte der Mathematik, Band II: Die Mathematik in der Kunst. Claassen & Goverts, Hamburg 1949
[5] Boëthius, A. M. S.: De institutione musica. In: G. Friedlein (Hrsg.): Anicii M. T. S. Boetti de institutione arithmetica, de institutione musica; accedit geometria quae fertur Boetti. Teubner Verlag, Leipzig 1867
[6] Busch, H. R.: Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie. Bosse Verlag, Regensburg 1970
[7] Dahlhaus, C.: Musikwissenschaft und Systematische Musikwissenschaft. In: Neues Handbuch der Musikwissenschaft, Bd. 10: Systematische Musikwissenschaft. Athenaion, Wiesbaden 1982, 25–48
[8] Descartes, R.: Musicae Compendium. Herausgegeben und ins Deutsche übertragen als „Leitfaden der Musik" von J. Brockt. Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1978
[9] Dorn, G., Frank, R., Ganter, B., Kipke, U., Poguntke, W., Wille, R.: Forschung und Mathematisierung – Suche nach Wegen aus dem Elfenbeinturm. Berichte der Arbeitsgruppe Mathematisierung der GH Kassel, Heft 3 (1982), 228–240; auch in: Wechselwirkung *15* (1982), 20–23
[10] Düring, I.: Die Harmonielehre des Klaudios Ptolemaios. Högskolas Arsskrift XXXVI, Göteborg 1930
[11] Eimert, H.: Lehrbuch der Zwölftontechnik. Breitkopf & Härtel, Wiesbaden 1952
[12] Faltin, P.: Phänomenologie der musikalischen Form. Eine experimentalpsychologische Untersuchung zur Wahrnehmung des musikalischen Materials und der musikalischen Syntax. Steiner Verlag, Wiesbaden 1979
[13] Graeser, W.: Bachs „Kunst der Fuge". In: Bach-Jahrbuch 1924, 1–104
[14] Graeser, W.: Neue Bahnen in der Musikforschung. In: Beethoven-Zentenarfeier, Internationaler Kongreß, Wien 1927, 301–303
[15] Graeser, W.: Körpersinn. Gymnastik – Tanz – Spiel. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1927
[16] Hentig, H. von : Magier oder Magister? Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprozeß. Klett Verlag, Stuttgart 1972
[17] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. 10. Auflage. Teubner, Stuttgart 1968
[18] Hofstätter, P. R., Wendt, D.: Quantitative Methoden der Psychologie, Bd. 1: Deskriptive, Inferenz- und Korrelationsstatistik. 4., neu bearb. Auflage. Barth, Frankfurt 1974

[19] Kepler, J.: Harmonice mundi. Gesammelte Werke Bd. VI. Beck, München 1940
[20] Kostka, S. M.: A bibliography of computer application in music. Joseph Boonin, Inc., Hackensack (N.J.) 1974
[21] Křenek, E.: Über neue Musik. Neudruck. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1977
[22] Lerdahl, F., Jackendoff, R.: A generative theory of tonal music. MIT Press, Cambridge (Mass.) 1983
[23] Mazzola, G.: Gruppen und Kategorien in der Musik - Entwurf einer mathematischen Musiktheorie. Heldermann Verlag, Berlin 1985
[24] Motte-Haber, H. de la : Musikalische Hermeneutik und empirische Forschung. In: Neues Handbuch der Musikwissenschaft, Bd. 10: Systematische Musikwissenschaft. Athenaion, Wiesbaden 1982, 171–244
[25] Motte-Haber, H. de la, Nitsche, P.: Begründungen musiktheoretischer Systeme. In: Neues Handbuch der Musikwissenschaft, Bd. 10: Systematische Musikwissenschaft. Athenaion, Wiesbaden 1982, 49–80
[26] Rameau, J.-Ph.: Traité de l'harmonie, Reduite à ses Principes naturels. Paris 1722
[27] Riemann, H.: Musikalische Logik. Hauptzüge der physiologischen und psychologischen Begründung unseres Musiksystems. Leipzig 1873
[28] Riemann, H.: Geschichte der Musiktheorie im 9.–19. Jahrhundert. Leipzig 1898
[29] Riemann, H.: Ideen zu einer Lehre der Tonvorstellungen. Jahrbuch der Musikbibliothek Peters *21/22* (1914/15), 1-26. Nachdruck in: B. Dopheide (Hrsg.): Musikhören. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1975, 14–47
[30] Schmidt, H.: Philosophisches Wörterbuch. 19. Aufl. (neu bearbeitet von G. Schischkoff). Kröner Verlag, Stuttgart 1974
[31] Stroh, W. M.: Mathematik und Musikterminologie. In: H. H. Eggebrecht (Hrsg.): Zur Terminologie der Musik des 20. Jahrhunderts. Musikwissenschaftliche Gesellschaft, Stuttgart 1974, 33–54
[32] Struik, D. J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976
[33] Tjepkema, S. L.: A bibliography of computer music. University of Iowa Press, Iowa City 1981
[34] Vogel, M.: Die Lehre von den Tonbeziehungen. Verlag für systematische Musikwissenschaft, Bonn-Bad Godesberg 1975
[35] Waerden, B. L. van der: Die Harmonielehre der Pythagoräer. In: Hermes *78* (1943), 163–199
[36] Waerden, B. L. van der: Die Pythagoräer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft. Artemis Verlag, Zürich und München 1979
[37] Weizäcker, C. F. von: Die Einheit der Natur. Hanser Verlag, München 1972
[38] Wellek, A.: Musikpsychologie und Musikästhetik. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt 1963
[39] Wille, R.: Mathematik und Musiktheorie. In: G. Schnitzler (Hrsg.): Musik und Zahl. Verlag für systematische Musikwissenschaften, Bonn-Bad Godesberg 1976, 233–264
[40] Wille, R.: Mathematische Sprache in der Musiktheorie. In: Jahrbuch Überblicke Mathematik 1980. Bibliographisches Institut, Mannheim 1980, 167–184
[41] Wille, R.: Symmetrien in der Musik – Thema für ein Zusammenspiel von Musik und Mathematik. Neue Zeitschrift für Musik *143* (1982), Heft 12, 12–19
[42] Wille, R.: Versuche der Restrukturierung von Mathematik am Beispiel der Grundvorlesung „Lineare Algebra". In: B. Artmann (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 1981. Schroedel Verlag, Hannover 1981, 102–112

[43] Wille, R.: Mathematik für Sozialwissenschaftler. Vorlesungsskript, TH Darmstadt 1981/82

[44] Wille, R.: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: I. Rival (ed.): Ordered sets. Reidel, Dordrecht-Boston 1982, 445–470

[45] Wille, R.: Zur Ordnung von Zeit und Raum – eine Untersuchung im Rahmen der formalen Begriffsanalyse. Vortrag auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Köln 1983

[46] Wille, R.: Liniendiagramme hierarchischer Begriffssysteme. In: H.-H. Bock (Hrsg.): Anwendungen der Klassifikation: Datenanalyse und numerische Klassifikation. Indeks Verlag, Frankfurt 1984, 32–51

[47] Wolpert, F. A.: Neue Harmonik. Heinrichhofen, Wilhelmshaven 1972

[48] Xenakis, I.: Formalized music, thoughts and mathematics in composition. Indiana University Press, Bloomington 1972

[49] Zaminer, F. (Hrsg.): Über Musiktheorie. Volk Verlag, Köln 1970

[50] Zarlino, G.: Istitutioni harmoniche. Venedig 1558

[51] Zurlinden, H.: Wolfgang Graeser. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1935